Concours commun

Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 \ . \qquad (N_1)$$

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\big)^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \ . \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \ .$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ , \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f'_A(t) = A\, e^{tA} = e^{tA}\, A \ .$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1}\, e^A\, P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A,B] = AB - BA \ .$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 ▷ Montrer que les matrices A et e^B commutent.

On définit une application

$$g\ :\ \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$
$$t \longmapsto g(t) = e^{t(A+B)}\, e^{-tB}.$$

2 ▷ Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}\ . \tag{1}$$

3 ▷ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 ▷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5 ▷ Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{A}{k}}\, e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right)^k = \exp(A+B)\ . \tag{2}$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right)\ \exp\left(\frac{B}{k}\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right).$$

6 ▷ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\ .$$

On introduit la fonction

$$h\ :\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$
$$t \longmapsto h(t) = e^{tA}e^{tB} - e^{t(A+B)}$$

7 ▷ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \text{ lorsque } k \to +\infty\ .$$

8 ▷ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit **groupe spécial linéaire** :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1 \big\}\ .$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son **algèbre de Lie** :

$$\mathcal{A}_G = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tM} \in G \big\}\ .$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 ▷ Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10 ▷ Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ En utilisant la partie 2, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 ▷ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto u(t) = e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 ▷ En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G,\ \forall B \in \mathcal{A}_G,\ [A, B] \in \mathcal{A}_G\ .$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est **tangente** à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé **espace tangent** à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 ▷ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 ▷ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 ▷ Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 ▷ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_A(t) = e^{tA} = \big(v_{i,j}(t)\big)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ .$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right) \ .$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.

19 ▷ Montrer que, si $\lim_{t \to +\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 ▷ Montrer que $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 ▷ En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\begin{aligned}
P &\text{ est inversible,}\\
D &\text{ est diagonale,}\\
N &\text{ est nilpotente,}\\
ND &= DN,\\
A &= P(D+N)P^{-1},\\
\chi_A &= \chi_D.
\end{aligned}$$

22 ▷ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O(t^p\, e^{\alpha t}) \text{ lorsque } \ t \to +\infty \ .$$

23 ▷ Étudier la réciproque de la question 19).

24 ▷ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tA} X = 0 \iff X = 0 \, .$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

et les sous-espaces $E_s = \mathrm{Ker}\left(P_s(A)\right)$, $E_i = \mathrm{Ker}\left(P_i(A)\right)$ et $E_n = \mathrm{Ker}\left(P_n(A)\right)$ de $E = \mathbf{C}^n$. *Les indices s, i, n signifient respectivement stable, instable et neutre.*

25 ▷ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \left\{X \in E \mid \lim_{t \to +\infty} e^{tA} X = 0\right\} \, .$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \left\{X \in E \mid \lim_{t \to -\infty} e^{tA} X = 0\right\}.$$

26 ▷ Montrer que

$$E_n = \left\{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^* \;\; \exists p \in \mathbf{N} \;\; \forall t \in \mathbf{R} \quad \|e^{tA} X\|_E \leq C \left(1 + |t|\right)^p\right\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA} X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

Fin du problème