CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I.

I.1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

EXERCICE II.

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

II.1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$?

II.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

II.3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$.

PROBLEME.

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

III.1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\forall x \in\,]0,1]\,,\quad x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

III.2. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathscr{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

III.3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|.$$

III.3.a. Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

III.3.b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2,-1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) = x^3$.

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Partie 2. Application : un théorème des moments

III.4. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k,
$\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \left(\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right).$

III.4.a. Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x$?

III.4.b. Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I, alors la suite de fonctions $(f.g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f.g$.

III.5. Application
Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple $(f,\, g)$ d'éléments de E par $(f\,|g\,) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et $F^{\perp}$ l'orthogonal de F. Déterminer $F^{\perp}$. A-t-on $E = F \oplus F^{\perp}$?

III.6.

III.6.a. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

III.6.b. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

III.6.c. Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k,\ \int_0^{+\infty} u^k f(u)\mathrm{d}u = 0.$$

III.6.d. Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une suite de polynômes.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

III.7. Question préliminaire
Soit $x \in [0,1]$, on note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \tfrac{1}{2}\left(x - (u_n)^2\right) = g_x(u_n).$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x, sa limite.

III.8. Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle même continue sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

III.9. Application
Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right).$$

III.9.a. Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

III.9.b. Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$.
On pose : $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

III.10. Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

III.10.a. Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

III.10.b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

III.11.b. Justifier que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \leq 2\,\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

III.11.c. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1310 – D'après documents fournis