

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 2\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.
2. Déterminer les solutions du problème posé.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g , déterminer les extrema possibles de f restreinte à H .
4. Retrouver les solutions du problème posé.

Troisième méthode

Soit $F = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner la dimension.
6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F .
7. Calculer la distance $d(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F .
8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.
9. En déduire la structure de l'ensemble H .
10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On note $E_{n-1} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_k(X) = X^k$, la base canonique de E_{n-1} . Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note φ_α l'endomorphisme de E_{n-1} qui à tout polynôme P , associe :

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} P(\alpha^q) X^q$$

Soit A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E_{n-1} . Soit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\bar{\omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m , la somme : $\sigma_m = \sum_{r=1}^n \omega^{m(r-1)}$.

On note $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω dans la base $\mathcal{B}$ de E_{n-1} .

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
3. Démontrer que, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.
4. La matrice A_ω est-elle symétrique ? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable ?
5. Calculer $A_\omega \times A_{\bar{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.
6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.
7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.
8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

Éléments propres de φ_ω

On note, pour $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω .
10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω .
11. En déduire que : $\forall q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, L_q \in E_{n-1}$.

On pose $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω .
13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0) .
14. En déduire :
 - un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$,
 - un vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.
15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω .

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω .

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose à présent $n \geq 5$.

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω .

19. Déterminer le spectre de φ_ω .

Exercice 3

Question de cours

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
5. Prouver que pour tout réel positif x , $f'(x) \leq e^x$.
6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Prouver que l'on a : $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.
7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.
10. Montrer que : $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.
11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.
12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.
14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

*** Fin du sujet ***