Mathématiques 2

MP, MPI

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

2024

Notations

— Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.

— On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathbb{K},\ f(x+1) - f(x) = h(x). \tag{E_h}$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h).

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.
La partie II introduit la définition et établit quelques propriétés des fonctions entières.
La partie III définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h), ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.
La partie IV étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I Étude de l'opérateur différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

Q 1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

Q 3. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ.

Q 4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_d)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Q 5. En déduire $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

Q 6. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h).

Q 7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme annulateur de Δ_d. L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable ?

II Fonctions entières

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par $\omega(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$.

II.A – Généralités

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développables en série entière de rayon de convergence infini.

Q 8. Justifier que si $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$ et $fg \in \mathcal{E}$.

Q 9. Soit $f \in \mathcal{E}$ dont on note $\sum a_n z^n$ le développement en série entière.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II.B – Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Q 10. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Q 11. Montrer qu'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{E}$ et une constante $C \in]0, 1[$ telles que, pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$,

$$\mathrm{e}^{\zeta} - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)) \quad \text{et} \quad |\beta(\zeta)| \leqslant C.$$

Q 12. En déduire que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\zeta^p}{\mathrm{e}^{\zeta} - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j.$$

Q 13. Montrer que $I_0 = 1$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = 0$.

III Polynômes de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\omega(t)}}{(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}}\,\mathrm{d}t.$$

III.A – Lien avec l'équation (E_h)

Q 14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

En déduire que B_n est un polynôme unitaire de degré n.

Q 15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$.

Q 16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z + 1) - B_n(z) = nz^{n-1}.$$

Q 17. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

III.B – Unicité

Q 18. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

Q 19. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = B_n$.

III.C – Une application analytique

Soit ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit de plus u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x,t) = \psi(x)\mathrm{e}^{tx}.$$

Q 20. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q 21. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A_n(t) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)$.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B_n$.

IV Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A – Une inégalité de contrôle

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |\mathrm{e}^z - 1| \geqslant c)\,.$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

Q 23. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et d'une suite de nombres complexes $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\pi$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $a_p = \mathrm{Re}(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}(z_p)$.

Q 24. Montrer que $a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q 25. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 \text{ si } b_p \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } b_p < 0 \end{cases}$$

En étudiant $\exp(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|)$, aboutir à une contradiction et conclure.

IV.B – Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant

$$\gamma_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto (2n+1)\pi e^{2\mathrm{i}\pi t} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, soit

$$Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}} \mathrm{d}t.$$

Q 26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{E}$.

Q 27. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}.$$

Q 28. Montrer qu'il existe deux constantes a, $b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|Q_n(z)| \leqslant a\mathrm{e}^{bn|z|}.$$

Q 29. En déduire l'existence d'une solution dans $\mathcal{E}$ à l'équation (E_h) lorsque $h \in \mathcal{E}$.

• • • FIN • • •
