**A2024 – MATH I MP**

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

**CONCOURS 2024**

# PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Durée de l'épreuve : 3 heures**

**L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.**

**L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.**

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

## Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

---

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

# Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, $x$ est un élément de $]0;1[$ fixé.

**1** ▷ Montrer que pour tout $\theta \in ]-\pi\,;\pi[$, la fonction $f$ définie par

$$\begin{aligned} f\ :\ ]0\,;+\infty[ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Soit $r$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} r\ :\ ]-\pi\,;\pi[ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

**2** ▷ Montrer que la fonction $r$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in ]-\pi;\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{\mathrm{i}\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

*Indication : soit $\beta \in ]0;\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.*

Soit $g$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} g\ :\ ]-\pi;\pi[ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto e^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

**3** ▷ Montrer que la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$ et que pour tout $\theta \in ]-\pi;\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où $h$ est la fonction définie par

$$\begin{aligned} h\ :\ ]0;+\infty[ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^x}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}. \end{aligned}$$

Calculer $h(0)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction $g$ est constante sur $]-\pi;\pi[$.

**4** ▷ Montrer que pour tout $\theta \in ]0;\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}x\theta}\Big) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}t.$$

**5** ▷ En déduire que :

$$\forall \theta \in ]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\Big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\Big)^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

**6** ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

**7** ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

## Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que $x$ est un élément de $]0;1[$ fixé.

**8** ▷ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

**9** $\triangleright$ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\cdot$$

**10** $\triangleright$ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\cdot$$

**11** $\triangleright$ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}\cdot$$

**12** $\triangleright$ En déduire enfin que :

$$\forall y \in ]0\,;\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}\cdot$$

## Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

**13** $\triangleright$ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**14** $\triangleright$ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

**15** $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

**16** $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

*Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".*

**17** $\triangleright$ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right).$$

*Indication : On pourra développer* $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

**18** $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$

# Partie IV : Calcul de $E\Big(|S_n|\Big)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

**19** $\triangleright$ Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Soient $S$ et $T$ deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que $T$ et $-T$ suivent la même loi.

**20** $\triangleright$ Montrer que :

$$E\Big(\cos(S+T)\Big) = E\Big(\cos(S)\Big)\,E\Big(\cos(T)\Big).$$

**21** $\triangleright$ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$ :

$$E\Big(\cos(tS_n)\Big) = \Big(\cos(t)\Big)^n.$$

**22** ▹ Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \mathrm{signe}(a)\ b$$

où $\mathrm{signe}(x) = x/|x|$ pour $x$ réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big).$$

**23** ▹ Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

**24** ▹ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$E\Big(|S_n|\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^n}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

**25** ▹ Conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\Big((n-1)!\Big)^2}.$$

Fin du problème