A2022 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in \left]-1,1\right[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0,1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée. En déduire que $t \mapsto (1-tz)\,e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}\cdot$$

3 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D,\ P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}\cdot$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

5 ▷ Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6 ▷ Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbf{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n p_n x^n$.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, P(e^{-t+i\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\,x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

9 ▷ Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}.$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\ ,$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 ▷ Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

11 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\,\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + O\Big(\frac{1}{t^n}\Big) \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

12 ▷ Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}\cdot$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

Étant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, ainsi qu'un réel θ, les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbf{E}(\cos(\theta X)) + i\,\mathbf{E}(\sin(\theta X)).$$

13 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ.

Dans les questions 14 ▷ à 18 ▷, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in\,]0,1[$ arbitraire. On pose $q = 1-p$.

14 ▷ Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel θ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{p\,e^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}\cdot$$

15 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbf{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

16 ▷ Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$, indépendante de p, telle que

$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{N},\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = p\,i^k e^{i\theta}\,\frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}} \quad \text{et} \quad P_k(0) = 1.$$

17 ▷ En déduire qu'il existe une suite $(C_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs, indépendante de p, telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \left|\mathbf{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}\right| \leq \frac{C_k\, q}{p^k}.$$

18 ▷ En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de p tel que

$$\mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^4\Big) \leq \frac{K\, q}{p^4}.$$

Dans les questions 19 ▷ à 21 ▷, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

19 ▷ Montrer successivement que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie, et que

$$\mathbf{E}(Y^2) \leq (\mathbf{E}(Y^4))^{1/2} \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(|Y|^3) \leq \Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4}.$$

20 ▷ Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$\left|e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{|u|^3}{6}.$$

En déduire que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbf{E}(Y^2)\,\theta^2}{2}\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4}.$$

21 ▷ Conclure que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - \exp\Big(-\frac{\mathbf{E}(Y^2)\,\theta^2}{2}\Big)\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\,\mathbf{E}(Y^4).$$

F. Convergence vers une gaussienne

Étant donné un réel $t > 0$, on pose, suivant les notations de la partie **C**,

$$m_t := S_{1,1}(t) \quad \text{et} \quad \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et θ, on pose

$$h(t,\theta) = e^{-im_t\theta}\,\frac{P\Big(e^{-t}e^{i\theta}\Big)}{P(e^{-t})}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et u, on pose

$$\zeta(t,u) = \exp\left(i\,\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t,u) = \zeta(t,u)\,h\Big(t, \frac{u}{\sigma_t}\Big).$$

22 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left|\prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - u_k|.$$

23 ▷ Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}(1 - e^{-kt})$, et on pose $Y_k = k(Z_k - \mathbf{E}(Z_k))$. Démontrer que

$$h(t,\theta) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21 ▷, l'inégalité

$$\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| \leq K^{3/4}|\theta|^3\, S_{3,3/4}(t) + K\,\theta^4\, S_{4,1}(t). \tag{2}$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question 18 ▷, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie **D**.

24 ▷ Montrer que $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}\,t^{3/2}}$ quand t tend vers 0^+. En déduire, pour tout réel u, que

$$j(t,u) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}.$$

25 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi],\ 1 - \cos\theta \geq \alpha\,\theta^2.$$

À l'aide de la question 9 ▷, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in\,]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t,\theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}.$$

26 ▷ Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,\mathrm{d}u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

G. La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P(e^{-t}) \sim \sqrt{\dfrac{t}{2\pi}} \exp\left(\dfrac{\pi^2}{6t}\right)$ quand t tend vers 0^+.

27 ▷ En appliquant la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\,n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Fin du problème