Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Partie I

1. Rappel des propriétés de la trace d'une matrice, notée **tr**.

1.1 Montrer que **tr** est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Prouver que : $\forall\,(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$.

1.3 En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2. Dans toute la suite du problème, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, ..., \lambda_n$

2.1 Justifer l'existence d'une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^{-1}AC = D$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

2.2 Vérifier alors que l'on a : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Partie II

Soit Q un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$: $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$.

On note $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses racines complexes, distinctes ou non et on a donc : $Q(X) = b_n \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$ et $T_0 = n$.

L'objectif de cette partie est de calculer les termes de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients du polynôme Q.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$, on a : $X^m - a^m = (X - a)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a^k\, X^{m-1-k}\right)$.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note Q_i le polynôme défini par : $Q_i(X) = \dfrac{Q(X)}{X - \alpha_i}$.

Montrer que Q' est une combinaison linéaire des Q_i que l'on déterminera.

3. En remarquant que $Q_i(X) = \dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$, montrer que l'on a :

$$Q_i(X) = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=r}^{n} b_k\, \alpha_i^{k-r}\right) X^{r-1}$$

4. Déduire des questions **2** et **3** que l'on a : $\forall\, r \in [\![1, n]\!],\ \ r\, b_r = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j}\, T_j$.

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer T_k en fonction de $T_0, ..., T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q.

6. Soit $k \geqslant n$.

6.1 Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j\, T_{k-n+j} = 0$.

6.2 Exprimer alors T_k à l'aide de $T_{k-n}, T_{k-n+1}, ..., T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q.

7. Conclure.

Partie III

On rappelle que A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et on pose :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k$$

et pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

On considère alors le système linéaire (Σ) dont les inconnues sont $u_1, ..., u_n$ et défini par les n équations suivantes :

$$S_1 + u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall_, k \in [\![2, n]\!],\ S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + ... + u_{k-1} S_1 + k\, u_k = 0$$

1. Démontrer que le système (Σ) possède une unique solution dans $\mathbb{R}^n$.

2. Vérifier que $u_1 = a_{n-1}$ et que $u_2 = a_{n-2}$. On pourra utiliser les relations coefficients racines d'un polynôme.

3. En utilisant la partie **II**, montrer que $(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0)$ est solution du système (Σ).

4. En déduire que l'on a : $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = a_{n-k}$.

Partie IV

1. Justifier que $P(A) = O_n$.

2. Prouver l'équivalence : A inversible $\iff a_0 \neq 0$.

3. Montrer que la matrice A^{-1}, si elle existe, s'écrit comme un polynôme en A.

4. On considère la suite $(B_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la suite $(d_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de réels définies par :

$$\begin{cases} d_1 = -\,\mathbf{tr}(A),\ B_1 = A + d_1\, I_n \\ \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ d_k = -\dfrac{1}{k}\,\mathbf{tr}(B_{k-1}A) \ \text{ et } \ B_k = B_{k-1}A + d_k\, I_n \end{cases}$$

4.1 Etablir que l' on a :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i\, A^{k-i}$$

Tournez la page S.V.P.

4.2 Montrer que l'on a aussi :

$$\forall\, k \in [\![2, n]\!],\quad d_k = -\frac{1}{k}\left(\mathbf{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i\, \mathbf{tr}(A^{k-i})\right)$$

4.3

4.3a Prouver alors que : $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $d_k = a_{n-k}$

4.3b Déterminer B_{n-1}.

4.3c Déterminer B_n. Le résultat était-il prévisible ?

5. Application : On prend $n = 4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Utiliser la méthode étudiée au-dessus pour déterminer le polynôme caratéristique de A et la matrice A^{-1}.

On pourra utiliser que : $B_2 A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Le listing ci-dessous fournit 5 fonctions écrites en langage Python. Les matrices seront notées comme des listes de listes.

```python
def fonction1 (A,B) :
    n=len(A)
    C=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            s=0
            for k in range(n):
                s+=A[i][k]*B[k][j]
            L.append(s)
        C.append(L)
    return C

def fonction2(x,n):
    A=[]
    for i in range(n):
        L=[0]*n
        L[i]=x
        A.append(L)
    return A

def fonction3(A):
    n=len(A)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=A[i][i]
    return S

def fonction4(A,x):
    n=len(A)
    B=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            L.append(A[i][j]*x)
        B.append(L)
    return B

def fonction5(A,B):
    n=len(A)
    C=[]
    for i in range(n):
        L=[]
        for j in range(n):
            L.append(A[i][j]+B[i][j])
        C.append(L)
    return C
```

6.1 Déterminer les types d'arguments pris par chaque fonction et le résultat qu'elles retournent.

6.2 Compléter le programme ci-dessous permettant d'afficher les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A .

```python
d=[1]
A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n=len(A)
#
# Compléter le programme
#
#
print("Les coefficents du polynôme caractéristique, dans l'ordre décroissant des puissances sont :",d)
```

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1111 – D'après documents fournis