A2018 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racines carrées de matrices complexes : existence et calcul numérique

---

Dans ce problème, on étudie l'existence de racines carrées d'une matrice complexe, puis on introduit l'algorithme de Newton pour calculer numériquement l'une de ces racines carrées, avec des considérations sur la convergence et la stabilité de l'algorithme.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n. On appelle *racine carrée* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On note $\widetilde{\mathbb{C}}$ l'ensemble des nombres complexes non nuls qui ne sont pas des nombres réels négatifs.

A. Quelques exemples

1) Montrer que la matrice $A = I_2$ admet une infinité de racines carrées (on pourra utiliser la notion de symétrie). Lesquelles sont des polynômes en A ?

2) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées et qu'aucune d'entre elles n'est un polynôme en A.

Dans la question suivante, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle qui est *définie positive*, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.

3) Montrer que A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive.

(On pourra montrer que deux racines carrées de ce type possèdent les mêmes valeurs et sous-espaces propres.)

B. Existence et calcul d'une racine carrée

Dans cette partie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice *inversible* quelconque.

4) Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $U = (u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes triangulaires supérieures. On suppose que T est inversible. Montrer que l'équation $U^2 = T$ est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{cases}$$

Montrer que T étant donnée, on peut résoudre ce système en choisissant une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. (On pourra considérer les parties réelles et imaginaires des $u_{i,i}$.)

5) En déduire que A admet une racine carrée. Si en outre, les valeurs propres de A appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$, montrer que A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

On admet qu'une telle racine carrée est unique et on la notera $\sqrt{A}$ dans toute la suite du problème.

C. Algorithme de Newton

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

et on admet que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $B(X, r)$ et $\overline{B}(X, r)$ les boules, respectivement ouverte et fermée, de centre $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et de rayon r.

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6) Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

On note m_A le polynôme minimal de A.

7) Montrer que la matrice $m_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

En déduire que s'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.

8) Réciproquement, si A et B ont au moins une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

(On pourra considérer une matrice de la forme XY^T où X et Y sont deux matrices colonnes bien choisies).

Soit $F : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par la formule $F(X) = X^2 - A$.

9) Montrer que la différentielle $\mathrm{d}F_X$ de F en $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{d}F_X(H) = XH + HX.$$

Déduire des deux questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible. Montrer que cette condition implique que X est inversible.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$. On pose $X^* = \sqrt{A}$ (la matrice $\sqrt{A}$ a été définie à la question 5).

On définit, sous réserve d'existence, une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$(\mathbf{N}) \begin{cases} X_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = X_k - (\mathrm{d}F_{X_k})^{-1}\big(F(X_k)\big). \end{cases}$$

Dans les questions suivantes, on étudie l'existence et la convergence de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

10) Montrer que $\mathrm{d}F_{X^*}$ est inversible et qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible pour tout $X \in \overline{B}(X^*, r)$.

Pour tout $Y \in \overline{B}(X^*, r)$ on pose $G(Y) = Y - (\mathrm{d}F_Y)^{-1}\big(F(Y)\big)$.

11) Calculer $G(X^*)$ et montrer que pour tout $H \in B(0, r)$,

$$G(X^* + H) - G(X^*) = (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

où

$$\big(\mathrm{d}F_{X^*+H}\big)^{-1} = \big(Id + (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1} \circ \mathrm{d}F_H\big)^{-1} \circ (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1}.$$

12) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout X de $B(X^*, r)$, $\|G(X) - X^*\| \leqslant C\|X - X^*\|^2$. (On pourra utiliser le résultat de la question 6.)

13) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X_0 \in B(X^*, \rho)$ la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bien définie et vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leqslant \frac{(\rho\sqrt{C})^{2^k}}{C}.$$

Que peut-on en conclure ?

D. Forme équivalente

Dans cette partie, on étudie deux algorithmes équivalents à celui de Newton. On rappelle que A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$. Soit U_0 et V_0 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sous réserve d'existence, on note $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbf{I})\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ U_{k+1} = U_k + H_k \text{ où } H_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie} \\ \qquad U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2 \qquad\qquad \text{pour tout } k \geqslant 0 \end{cases}$$

et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbf{II})\begin{cases} V_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) \quad \text{pour tout } k \geqslant 0. \end{cases}$$

14) Si la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**N**) et $U_0 = X_0$, montrer que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et égale à $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Réciproquement si la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et $X_0 = U_0$, montrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**N**) et égale à $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On suppose dorénavant ces conditions vérifiées.

15) On suppose que $U_0 = V_0$ commute avec A. Montrer que la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**II**) et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = V_k$ commute avec A. (On pourra d'abord montrer que U_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ et considérer la matrice $G_k = \frac{1}{2}\left(U_k^{-1}A - U_k\right)$.)

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives, et qu'une telle matrice admet une unique racine carrée définie positive (question 3).

Dans la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive.

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (**II**) avec $V_0 = \mu I_n$ et $\mu > 0$. On fixe une matrice orthogonale P de sorte que $A = PDP^T$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A, ordonnées par ordre croissant. On note $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs propres correspondants.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{1, \dots, n\}$ quelconques.

16) Montrer que V_k est symétrique réelle définie positive de mêmes vecteurs propres $e_1, \dots, e_n$ que A dont on notera $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n}$ les valeurs propres correspondantes. Trouver une relation entre $\lambda_{k+1,\ell}$ et $\lambda_{k,\ell}$.

17) Montrer que

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell}-\sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell}+\sqrt{\lambda_\ell}}=\left(\frac{\mu-\sqrt{\lambda_\ell}}{\mu+\sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}.$$

18) Déterminer la limite de la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

E. Stabilité

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (**II**) avec $V_0=\sqrt{A}$. Soit $\varepsilon>0$ et i, j deux indices distincts de $\{1,\dots,n\}$. On note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de la matrice orthogonale P définie dans la partie précédente et on pose $\Delta=\varepsilon C_i C_j^T$.

Soit $\widehat{V_0}=V_0+\Delta$. La matrice $\widehat{V_1}$ est calculée par la relation (**II**) à partir de $\widehat{V_0}$ et on pose $\Delta_1=\widehat{V_1}-V_1$. Ensuite $\widehat{V_2}$ est calculé à partir de $\widehat{V_1}$ par la relation (**II**), puis $\widehat{V_3},\widehat{V_4}\dots$ de la même manière.

19) Montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases}(V_0+\Delta)^{-1}=V_0^{-1}-V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}\\ \Delta_1=\frac{1}{2}\left(\Delta-V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A\right).\end{cases}$$

20) Déterminer la valeur de $\eta\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\widehat{V_k}=\sqrt{A}+\eta^k\Delta.$$

21) On appelle *conditionnement* de A le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite. Que doit vérifier le conditionnement de A pour que la suite $(\widehat{V_k})_{k\geqslant 0}$ converge ?

FIN DU PROBLÈME